

На правах рукописи



Гарнышев Марат Юрьевич

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В ПЛАСТАХ,
ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ С ПОДОШВЕННОЙ
ВОДОЙ**

01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Работа выполнена на кафедре аэрогидромеханики Казанского (Приволжского) федерального университета.

Научный руководитель — доктор физико-математических наук,
доцент

Мазо Александр Бенцианович

Официальные оппоненты — доктор физико-математических наук,
доцент

Конюхов Владимир Михайлович

— кандидат физико-математических наук,
доцент

Шевченко Денис Вячеславович

Ведущая организация — Учреждение Российской академии наук
Институт механики и машиностроения
Казанского научного центра РАН

Защита состоится 29 сентября 2011 г. в 14 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.11 при Казанском (Приволжском) федеральном университете, расположенном по адресу: 420008, Казань ул. Кремлевская, 18.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Казанского (Приволжского) федерального университета.

Автореферат разослан «_____» _____ 2011 г.

Учёный секретарь диссертационного
совета, к.ф.-м.н., доцент



Саченков А.А.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. В связи с истощением запасов углеводородного сырья в последние годы увеличилась доля трудно извлекаемых запасов нефти. К ним относятся, например, залежи высоковязкой нефти сложного строения, разработка которых осложняется наличием подошвенной воды и включений в виде изолированных резервуаров (линз). Применение традиционных методов нефтедобычи к подобным объектам может приводить к таким негативным результатам, как преждевременное обводнение скважин, непродуктивная (с уходом под залежь) закачка воды и т.д. Решение указанных проблем предполагает разработку и совершенствование специальных математических моделей фильтрации.

Современные методы моделирования разработки нефтяных месторождений основаны на численном решении полных трёхмерных уравнений подземной гидромеханики. Они включены в состав таких известных пакетов, как Roxar, More, Eclipse, Landmark, ТРИАС и др. Однако, наряду с очевидными достоинствами, использование данных пакетов имеет и существенные недостатки: большие затраты вычислительных ресурсов и повышенные требования к детальному заданию исходных данных по геологической структуре, фильтрационным свойствам резервуара и режиму работы скважин. Ещё один существенный недостаток – это дороговизна указанных программных продуктов, что делает практически невозможным их использование малыми предприятиями и индивидуальными исследователями. В этих условиях на первый план выходит задача построения упрощённых математических моделей и разработка соответствующих методов их численной реализации.

Цель диссертационной работы состоит в математическом описании гидродинамического взаимодействия нефтяных пластов с замкнутыми резервуарами и подстилающими водоносными горизонтами, построении и числен-

ной реализации упрощённых математических моделей двухфазной фильтрации в пластах со слабопроницаемой подошвой¹.

Достижение поставленной цели требует решение следующих **задач**:

- Построение математических моделей гидродинамического взаимодействия пласта с замкнутыми резервуарами (линзами) и их численная реализация.
- Построение упрощённых, осреднённых по толщине, моделей для пластов со слабопроницаемой подошвой; их верификация сравнением с полной математической моделью слоистого пласта.
- Разработка численных алгоритмов и программного обеспечения решения плоских задач двухфазной фильтрации в пластах с проницаемой подошвой и их применение к мониторингу залежи массивного типа.

Научная новизна результатов, выносимых на защиту.

1. Предложена новая математическая модель гидродинамического взаимодействия нефтяного пласта с замкнутыми изолированными резервуарами. С её помощью объяснён аномальный характер кривых восстановления давления на ряде скважин одного из месторождений Волго-Уральской нефтегазоносной провинции.
2. Предложены две оригинальные фильтрационные модели, учитывающие вертикальные перетоки через слабопроницаемую подошву. В первой из них подошвенная вода «размазывается» по всей толщине пласта, во второй – образует тонкий водонасыщенный пограничный слой. Сравнением

¹ В диссертации применительно к подстилающим водоносным горизонтам используется термин «аквифер», а под «подошвой» понимается слой плотных пород, отделяющий коллектор от аквифера.

с полной RZ -моделью показано, что вторая двухслойная модель более адекватно описывает процессы взаимодействия коллектора с аквифером.

3. Осреднённая по толщине фильтрационная модель модифицирована для учёта стока воды под залежь в окрестности нагнетательных скважин. Она применена для анализа эффективности заводнения на одном из месторождений Волго-Уральской нефтегазоносной провинции. Показано преимущество циклической закачки воды в пласт.

Достоверность результатов. Предложенные в диссертации математические модели и вытекающие из них результаты основаны на общих законах и уравнениях подземной гидромеханики, физически обоснованных гипотезах и упрощениях. Точность численных результатов подтверждается многовариантными тестовыми расчётами, а также качественным и количественным совпадением результатов с экспериментальными данными.

Практическая значимость. Все теоретические результаты диссертации имеют ярко выраженную практическую направленность. Методы и алгоритмы численного решения задач двухфазной фильтрации с учётом проницаемости подошвы пласта реализованы в виде комплекса программ, который применялся при моделировании разработки конкретных месторождений.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях: VII молодежная научная школа-конференция «Лобачевские чтения – 2008», Казань, 1–6 декабря 2008 г.; VIII молодежная научная школа-конференция «Лобачевские чтения – 2009», Казань, 1–6 ноября 2009 г.; XI молодежная научная школа-конференция «Лобачевские чтения – 2010», Казань, 1–6 октября 2010 г.; VIII Всероссийская конференция «Сеточные методы для краевых задач и приложения», посвящённая 80-летию со дня рождения А.Д. Ляшко, Казань, 1–5 октября 2010 г.; XVII Международ-

ная конференция по Вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС '2011), Алушта, 25–31 мая 2011 г.; Итоговые научные конференции Казанского университета, Казань, 2006–2010 гг.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 7 печатных работ, из них 2 статьи в журналах, рекомендованных ВАК [3, 7], 3 статьи в сборниках трудов конференций [4–6] и 2 тезисов докладов [1, 2].

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения и списка использованной литературы. Работа изложена на 143 страницах, содержит 48 рисунков, 3 таблицы. Библиография включает 130 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, а также дан краткий обзор литературы.

В **первой главе** дано математическое описание гидродинамического взаимодействия залежи высоковязкой нефти с замкнутыми резервуарами; предлагаются две математические модели, отличающиеся способом моделирования линз. Эти модели применяются для объяснения аномального (линейного) поведения кривых восстановления давления (КВД) на ряде скважин рассматриваемого месторождения.

В **п. 1.1** предлагается схема пласта, которая допускает существование, помимо основного набора гидродинамически взаимосвязанных пропластков, ещё и ряда изолированных либо слабо связанных с основным коллектором резервуаров (рис. 1). В быстрых переходных процессах, происходящих при пуске и остановке скважины, либо при периодическом режиме добычи, линзы

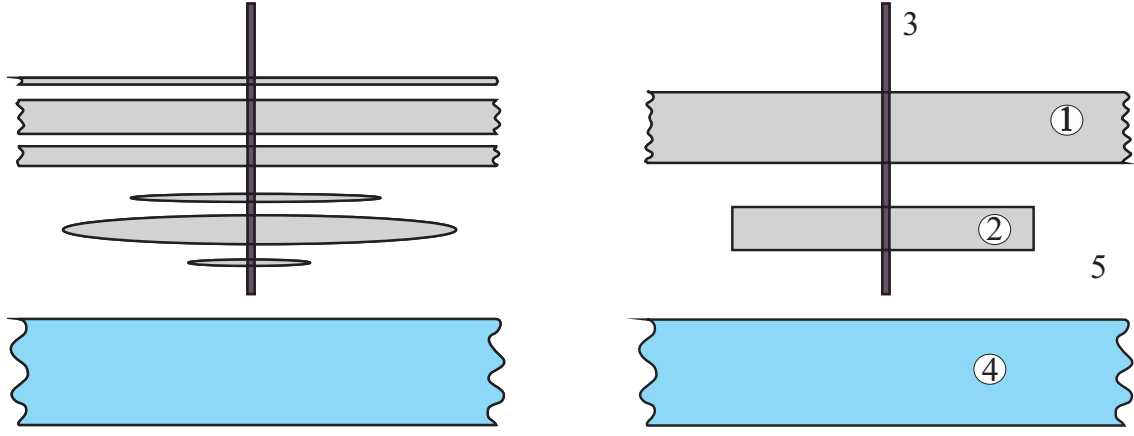


Рис. 1. Схематическое изображение объекта (слева) и его гидродинамическая абстракция (справа). 1 – основной коллектор, 2 – линза, 3 – скважина, 4 – аквифер, 5 – подошва.

играют демпфирующую роль, которая, в частности, препятствует быстрому восстановлению давления после остановки скважины.

Качественные различия в виде КВД для одной скважины в разные периоды разработки объясняются изменением подвижности жидкости, заполняющей линзу. До начала разработки и коллектор 1, и линза 2 заполнены преимущественно высоковязкой нефтью. В процессе разработки в линзе устанавливается пониженное давление, что приводит к фильтрации воды из расположенной ниже водонасыщенной толщи (аквифера 4) через плотные породы (подошва 5) в линзу и, в конечном итоге, – к замещению нефти водой, вязкость которой значительно ниже.

В п. 1.2 предлагается математическая модель гидродинамического взаимодействия основного коллектора и линзы (в данном случае они приняты цилиндрическими), осреднённая по толщине $H^{(i)}$. В радиально-симметричной постановке в безразмерных переменных она включает в себя следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial p^{(1)}}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p^{(1)}}{\partial r} \right) = 0, \quad t > 0, \quad r_w < r < R^{(1)}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial p^{(2)}}{\partial t} - \frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p^{(2)}}{\partial r} \right) = 0, \quad t > 0, \quad r_w < r < R^{(2)}; \quad (2)$$

$$r = r_w : \begin{cases} p^{(1)} = p^{(2)} = p_w, \\ r \frac{\partial p^{(1)}}{\partial r} + \xi r \frac{\partial p^{(2)}}{\partial r} + \gamma \frac{\partial p_w}{\partial t} = q(t). \end{cases} \quad (3)$$

$$r = R^{(1)} : p^{(1)} = 0; \quad r = R^{(2)} : \frac{\partial p^{(2)}}{\partial r} = 0. \quad (4)$$

$$t = 0 : p^{(1)} = p^{(2)} = 0. \quad (5)$$

Здесь индексом (i) , $i = 1, 2$ отмечены параметры основного коллектора и линзы. Математическая модель (1) – (5) содержит шесть безразмерных параметров: γ , r_w , $R^{(1)}$, $R^{(2)}$, η и ξ . Параметр γ характеризует ёмкостные свойства скважины; три параметра $R^{(2)}$, η и ξ определяют размер и фильтрационные свойства линзы; размер коллектора $R^{(1)}$, как правило, можно положить равным бесконечности. Если фильтрационные свойства пласта и линзы одинаковы, $k^{(1)} = k^{(2)}$, $\beta^{(1)} = \beta^{(2)}$, то $\eta = K_\mu^{-1}$, $\xi = K_H/K_\mu$, и влияние линзы на решение задачи будет определяться её относительными размерами – радиусом $R^{(2)}$, толщиной $K_H = H^{(2)}/H^{(1)}$ и вязкостью $K_\mu = \mu^{(2)}/\mu^{(1)}$, заполняющего линзу флюида. В процессе разработки месторождения два параметра – $R^{(2)}$ и K_H – остаются постоянными, поэтому причиной трансформации КВД (от логарифмической к линейной) может служить лишь изменение K_μ .

В п. 1.3 приводятся результаты расчётов по модели (1) – (5). В частности, численно подтверждается влияние параметра K_μ на вид КВД, рис. 2а. Демпфирующую роль линзы иллюстрирует рис. 2б, где изображено влияние отношения вязкостей на забойное давление при периодическом режиме работы скважины. Видно, что при $K_\mu = 1$ линза слабо влияет на изменение давления $p_w(t)$. При уменьшении K_μ давление на скважине не успевает следовать за изменениями дебита, что приводит к снижению амплитуды колебаний функции $p_w(t)$.

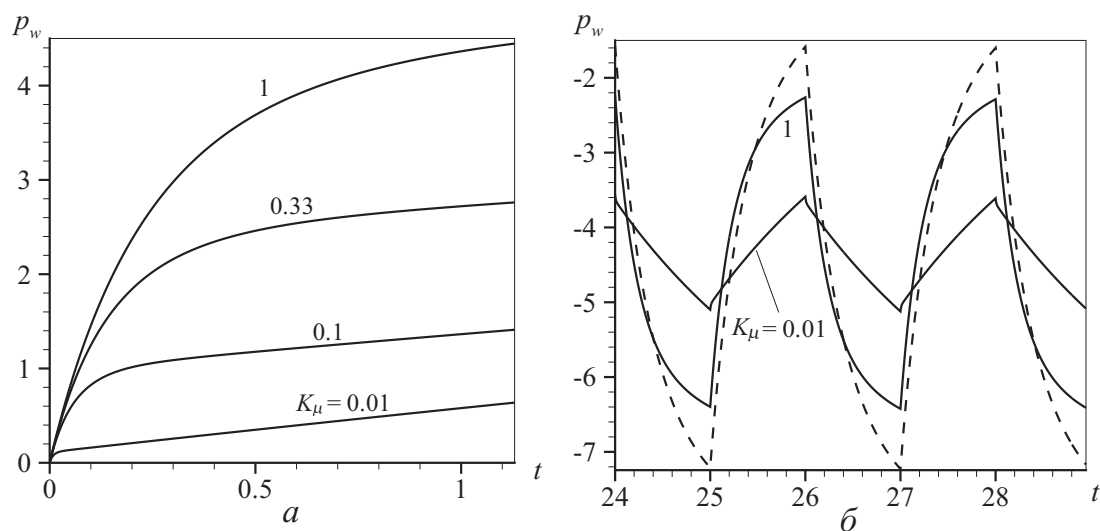


Рис. 2. Влияние отношения вязкостей на вид КВД (а) и давление на скважине в случае периодического режима работы скважины (б). Штриховой линией показан случай отсутствия линзы.

Сопоставление полученных результатов с экспериментальными данными на примере одной из скважин приводится на рис. 3.

В п. 1.4 предлагается упрощённая модель гидродинамического взаимодействия залежи с замкнутым резервуаром, которая, в отличие от модели (1) – (5), не требует знания геометрии линзы. В качестве главного допущения

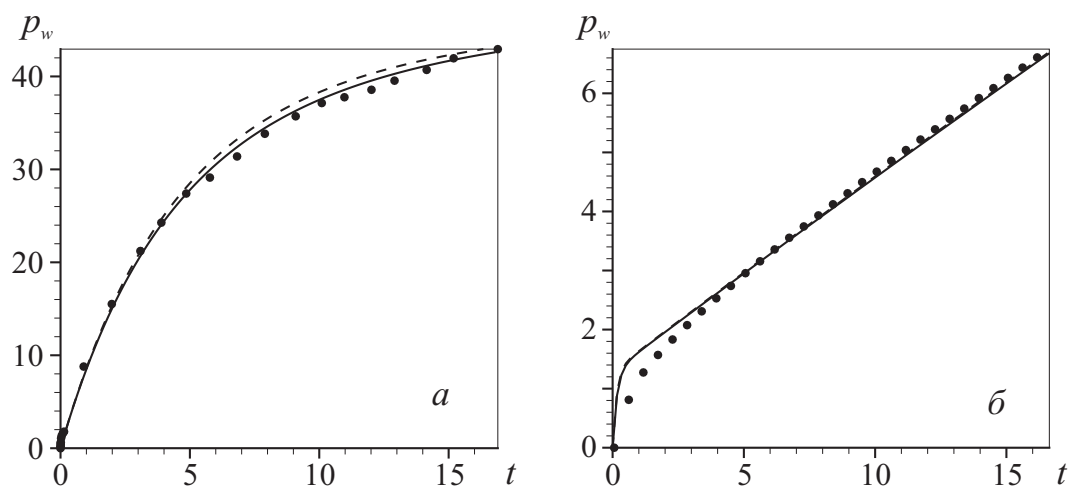


Рис. 3. Зависимость давления p_w , атм от времени t , сут. Экспериментальные данные (маркеры), теоретические КВД, рассчитанные по полной модели (сплошная линия) и по упрощённой модели (штриховая линия): а – 2006 г. ($K_\mu = 0.74$), б – 2008 г. ($K_\mu = 0.01$)

упрощённой модели принимается формула, связывающая приток флюида из линзы в скважину с мгновенной средней депрессией

$$r_w \frac{\partial p^{(2)}}{\partial n} \Big|_{\Sigma_w} = -\phi (\langle p \rangle - p_w), \quad (6)$$

в которой ϕ – безразмерный форм-фактор, концентрирующий в себе информацию о форме линзы, Σ_w – боковая поверхность части ствола вертикальной скважины в линзе, n – внешняя нормаль к Σ_w , $\langle p \rangle$ – среднее давление в линзе.

В безразмерных переменных задача описывается следующей системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) &= 0, \quad t > 0, \quad r_w < r < R; \\ r = R : p &= 0; \quad t = 0 : p = 0; \end{aligned} \quad (7)$$

$$r = r_w : r \frac{\partial p}{\partial r} = q(t) - \alpha (\langle p \rangle - p) - \gamma \frac{dp}{dt}.$$

$$\frac{\partial \langle p \rangle}{\partial t} = -K_t (\langle p \rangle - p_w), \quad p_w = p(r_w, t), \quad \langle p \rangle(0) = 0. \quad (8)$$

Здесь

$$K_t = \phi \frac{t_0}{t^{(2)}}, \quad t^{(2)} = \frac{V \mu^{(2)} \beta^{(2)}}{2\pi k^{(2)} H^{(2)}}; \quad \alpha = \phi \frac{H^{(2)}}{K_\mu H} = \phi \xi. \quad (9)$$

Безразмерные коэффициенты K_t , α характеризуют линзу и вычисляются через её объём V , относительную вязкость K_μ и форм-фактор ϕ , который в общем случае следует рассматривать как идентификационный параметр модели. Время $t^{(2)}$ является характерным для нестационарных процессов в линзе.

Для замкнутого резервуара в виде цилиндра радиуса $R^{(2)}$ и высотой $H^{(2)}$ при помощи преобразования Лапласа и разложения по малому параметру получена аналитическая формула для форм-фактора

$$\phi = \left(\ln \frac{R^{(2)}}{r_w} - \frac{3}{4} \right)^{-1}. \quad (10)$$

Результаты расчёта КВД и сравнение полученных при различных K_μ кривых с экспериментальными данными и расчётами по полной модели (1) – (5) приведены на рис. 3.

В п. 1.5 описывается численная реализация математических моделей взаимодействия основного коллектора и линзы. При решении задачи пьезопроводности по обеим моделям применяется двухслойная по времени разностная схема. Системы линейных алгебраических уравнений имеют трёхдиагональную матрицу и решаются методом прогонки. При аппроксимации производной в прискваженном узле используется мультипликативное выделение особенности.

Во второй главе предлагаются и исследуются упрощённые модели двухфазной фильтрации в пластах со слабопроницаемой подошвой с учётом вертикальных потоков флюида.

В п. 2.1 приводятся общие трёхмерные уравнения двухфазной фильтрации, которые положены в основу построения упрощённых математических моделей. Указаны основные допущения: пренебрежение капиллярными и гравитационными силами, несжимаемость фаз и линейная зависимость пористости от давления.

В п. 2.2 дана математическая постановка задачи двухфазной фильтрации в пласте, коллектор которого ограничен непроницаемой кровлей и слабопроницаемой подошвой, через которую фильтруется вода в аквифер и обратно.

П. 2.3 содержит вывод упрощённой двумерной XU -модели из трёхмерной. Упрощение достигается за счёт понижения размерности путём осреднения по толщине пласта. При этом в уравнениях для давления и насыщенности появляется член, который регулирует транспорт воды через подошву и является главной отличительной чертой представленной модели от общеизвестных моделей двухфазной фильтрации с осреднением по мощности.

Уравнения для средних давления в коллекторе p_H , насыщенности s_H и давления в аквифере p_H^a в безразмерных переменных имеют следующий вид

$$\beta \frac{\partial p_H}{\partial t} + \frac{1}{H} \nabla \cdot (H \vec{u}_H) = \frac{w_b}{H}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial s_H}{\partial t} + \frac{1}{H} \nabla \cdot (H f \vec{u}_H) = \frac{f w_b}{H}, \quad (12)$$

$$\beta \frac{\partial p_H^a}{\partial t} = k_a \Delta p_H^a - \frac{w_b}{H_a}. \quad (13)$$

Эти уравнения отличаются от общеизвестных наличием члена со скоростью потока через подошву

$$w_b = \alpha (p_H^a - p_H) \varphi(p_H, s_H), \quad \varphi(p_H, s_H) = 1 - \hbar(p_H) (1 - \hbar(s_H)). \quad (14)$$

Здесь $\alpha \ll 1$ – безразмерный параметр, характеризующий проницаемость подошвы, \hbar – функция Хевисайда. Функция φ в модели (14) регулирует транспорт воды через подошву: вода поступает из-под подошвы в пласт, если давление $p_H < 0$, и из пласта под подошву при положительных давлении и водонасыщенности s_H . Функция φ не допускает фильтрации нефти через подошву. Это предположение справедливо для высоковязких нефтей ($K_\mu = \mu_w/\mu_o \ll 1$). Для эксплуатационной скважины в коллекторе создаётся депрессия ($p_H < 0$), скорость $w_b > 0$, и в коллектор может поступать только вода. В окрестности нагнетательной скважины $p_H > 0$, $w_b < 0$ (флюид фильтруется из коллектора под подошву). Теоретически в этом случае возможен транспорт нефти из пласта в аквифер, однако расчёты по полной RZ -модели показывают, что продвижение нефтенасыщенного фронта в подошву незначительно, и при заданных параметрах за время разработки не достигает аквифера.

Двухмерная радиальная RZ -модель, которая рассматривается в п. 2.4, отражает всю специфику горизонтальных и вертикальных потоков в разрезе слоисто-неоднородного пласта. Результаты численных расчётов показывают,

что отклонение давления в аквифере от давления на контуре пренебрежимо мало по сравнению с изменением давления в основном коллекторе. Это позволяет в значительной степени упростить модель, перейдя от трёхслойной к однослойной, учитывая взаимодействие коллектора с аквифером с помощью новых граничных условий на подошве.

Были решены две модельные радиально-симметричные задачи: 1) приток к добывающей скважине; 2) закачка воды через нагнетательную скважину. Расчёты подтвердили, что в обоих случаях фильтрационные потоки в основном коллекторе значительно более интенсивны чем в аквифере и подошве. При этом в коллекторе поток жидкости направлен преимущественно горизонтально, а в слабопроницаемой подошве — вертикально (рис. 4б). В задаче 1 вода, поступающая в пласт из-под подошвы образует тонкий водонасыщенный слой, по которому движется к скважине (рис. 4а). В задаче 2 фронт вытеснения имеет форму поверхности расширяющегося цилиндра.

Двухмерная RZ -модель используется в качестве тестовой для оценки возможности применения упрощённой модели с осреднением по толщине (11) – (13). Результаты решения задачи 2 по двум моделям очень близки при любых (линейных и кубических) относительных фазовых проницаемостях (ОФП).

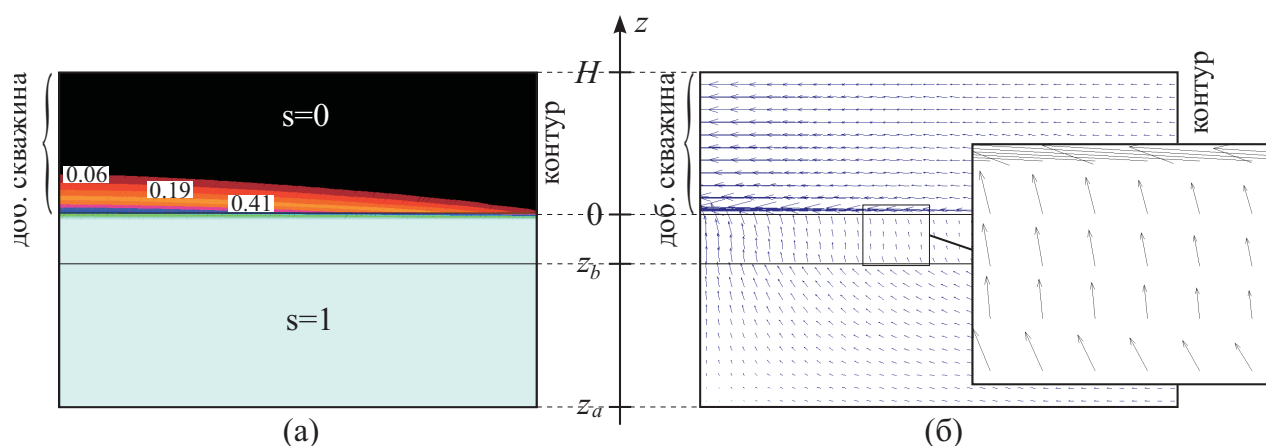


Рис. 4. Подсчитанные поля водонасыщенности (а) и скоростей (б). На врезке показано вертикальное направление потока в подошве

Для задачи 1 удовлетворительное совпадение результатов наблюдается лишь при линейных ОФП; при кубических имеются заметные (в два и более раз) различия в значениях водонасыщенности и дебитов. Это объясняется некорректностью применения «осреднённых законов» Дарси и суммарного потока при нелинейных ОФП при существенно неоднородном распределении насыщенности по толщине коллектора.

На основании анализа фильтрационных потоков, рассчитанных по RZ -модели, в п. 2.5 предлагается принципиально новая одномерная математическая модель с тонким водонасыщенным слоем около подошвы, схема которой изображена на рис. 5.

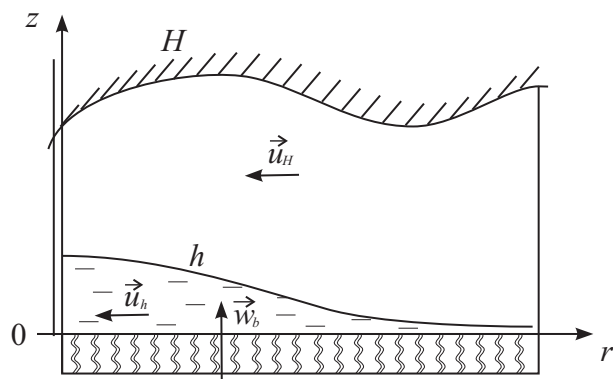


Рис. 5. Схема фильтрации в пласте с водонасыщенным слоем

Вода, поступающая из-под подошвы в основной коллектор, не «размазывается» по всей его толще, как в модели (11) – (13), а образует тонкий пограничный слой $0 < z < h(x, y, t)$, по которому фильтруется в направлении добывающей скважины под действием общего для этого слоя и вышележащего коллектора градиента давления. Согласно принятой схеме пласт делится на два гидродинамически изолированных резервуара: основной коллектор $h < z < H$, водонасыщенность которого определяется только потоками воды от нагнетательных скважин, и водонасыщенный слой, толщина $h(x, y, t)$ которого зависит от потоков воды через слабопроницаемую подошву.

Данная модель определяется тремя уравнениями: для давления, насыщенности и толщины водонасыщенного слоя. В радиально-симметричной постановке в безразмерных переменных они выглядят следующим образом

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rh \vec{u}_h) = w_b; \quad (15)$$

$$\beta \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{Hr} \frac{\partial}{\partial r} \{r [(H - h) \vec{u}_H + h \vec{u}_h]\} = \frac{w_b}{H}; \quad (16)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{1}{(H - h)r} \frac{\partial}{\partial r} [r (H - h) f \vec{u}_H] = 0. \quad (17)$$

Здесь $\vec{u}_h = -\partial p / \partial r$ и $\vec{u}_H = -\sigma \vec{u}_h$ – скорости фильтрации в слое и основном коллекторе; а $w_b = -\alpha p \varphi(p, h)$ – скорость фильтрации через подошву. Входящая в эту формулу функция φ описана в параграфе 2.4.

Показано, что результаты решения задач 1 и 2 по модели (15) – (17) хорошо согласуются с результатами, полученными по полной двухмерной RZ -модели даже в случае нелинейных ОФП.

В п. 2.6 приводятся методы численного решения задач двухфазной фильтрации с помощью упрощённых моделей и полной RZ -модели. Пространственная дискретизация уравнений проводится на основе метода конечных объёмов (МКО). Уравнения для давления и насыщенности (а в модели (15) – (17) и для толщины водонасыщенного слоя) решаются последовательно на каждом временном слое. Давление p рассчитывается по неявной (для RZ -модели применяется метод сопряжённых градиентов с модифицированным предобуславливателем ILU, для двух других – метод прогонки), а насыщенность s и толщина слоя h – по явной схеме («upwind»). При этом временной шаг τ сеточной схемы выбирается из соображений точности решения нестационарной задачи для давления; внутри каждого временного слоя задачи переноса для s и h решаются с более мелким шагом $\tau_s = \tau / N_s$, $N_s \sim 10 \div 50$, который обеспечивает устойчивость явных схем при выполнении условия Куранта. Для обеспечения корректности расчёта давления в окрестности скважин применяется мультипликативный метод выделения особенности.

В третьей главе предлагается и исследуется плоская (XY) математическая модель двухфазной фильтрации для расчёта полей давления и водонасыщенности с возможностью стока воды под залежь в окрестности нагнета-

тельных скважин. Она применяется для оценки эффективности различных режимов заводнения на одном из месторождений Волго-Уральской нефтегазоносной провинции.

В п. 3.1 приводится история разработки месторождения, а также данные пьезометрии для ознакомления с проблемой, связанной с применением заводнения.

В п. 3.2 излагается обоснование использования осреднённой по толщине пласта модели, а также делается предположение о трещиноватости подошвы пласта. Плоская двухмерная математическая модель, приведённая в этом параграфе, служит обобщением упрощённой модели, рассмотренной в п. 2.3.

Уравнение для давления $p(x, y, t)$ в пласте, вскрытом системой N_w вертикальных скважин с дебитами $q_k(t)$, $k = 1..N_w$ имеет вид

$$\begin{aligned} \beta H \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div}(H \vec{u}) - w_b &= \sum_{k=1}^{N_w} \delta(x - x_k) \delta(y - y_k) q_k, \\ \vec{u} &= -\sigma(s) \nabla p, \quad \sigma = \frac{k}{\mu}, \quad \frac{1}{\mu} = \frac{k_w}{\mu_w} + \frac{k_o}{\mu_o}, \end{aligned} \quad (18)$$

в котором $s = (s - s_*) / (s^* - s_*) \in [0, 1]$ – приведённая водонасыщенность, удовлетворяющая уравнению баланса воды

$$\begin{aligned} mH(s^* - s_*) \frac{\partial s}{\partial t} + \operatorname{div}[H f(s) \vec{u}] - w_b &= \\ &= \sum_{k=1}^{N_w} \delta(x - x_k) \delta(y - y_k) f(s) q_k(t); \\ f(s) &= \frac{k_w(s)}{k_w(s) + K_\mu k_o(s)}, \quad K_\mu = \frac{\mu_w}{\mu_o}. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь скважины представлены точечными источниками (стоками) интенсивности $q_k(t)$, их положение (x_k, y_k) в плане задаётся с помощью δ -функции Дирака. $k_w = s^\lambda$, $k_o = (1 - s)^\lambda$ – относительные фазовые проницаемости (принимается $\lambda = 3$).

Подошва имеет толщину H_b , давление на её нижней границе считается

постоянным и равно гидростатическому p_{Γ} . Предполагается, что подошва пронизана сетью (вертикальных) трещин, которые способны смыкаться и размыкаться при некотором критическом давлении $p_* > p_{\Gamma}$. В обычных условиях, когда $p < p_*$, трещины сомкнуты, и подошва непроницаема для жидкости. Если же в результате закачки воды в скважину давление p превысит p_* , трещины начнут раскрываться, и эффективная проницаемость станет равной $k_b > 0$. Это вызовет фильтрационный сток воды из пласта через подошву со скоростью

$$w_b = -\frac{k_b}{\mu_w} \frac{p - p_{\Gamma}}{H_b} \bar{h}(p - p_*) \bar{h}(s). \quad (20)$$

Функция Хевисайда \bar{h} в формуле (20) показывает, что сток воды под залежь имеет место лишь при условии, что во флюиде над подошвой есть вода ($s > 0$), а давление выше критического $p > p_*$.

В п. 3.3 описывается методика адаптации ХУ-модели. Процесс адаптации состоит из трёх этапов, в результате определяются поле проницаемости $k(x, y)$ и параметры подошвы $k_b/\mu_w H_b$, p_* . На первом этапе находятся значения проницаемости в призабойных зонах опорных скважин на основе интерпретации

экспериментальных КВД; найденные значения интерполируются для восстановления предварительного поля проницаемости $k(x, y)$ во всей расчётной области. На втором этапе это поле корректируется так, чтобы результаты расчёта (в частности, давления на забоях скважин) согласовывались с историей разработки месторождения в безводный период. Третий этап заключается в подборе фильтрационных параметров подошвы, определяющих скорость

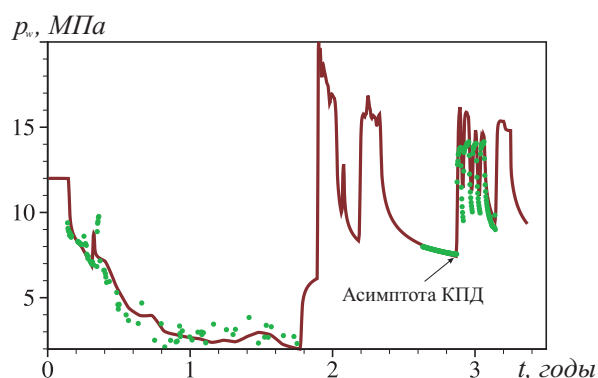


Рис. 6. Сравнение расчёта (сплошная линия) и замеров (маркеры) забойного давления

стока воды под залежь при переводе ряда скважин под нагнетание (рис. 6).

В п. 3.4 приводится оценка эффективности заводнения месторождения на основе двухмерной XU -модели. Сравниваются стационарный и циклический режимы закачки. Показывается преимущество циклического режима.

В п. 3.5 описывается численная реализация фильтрационной модели. Для численного решения задачи применяется комбинация метода конечных элементов (неявная схема расчёта давления) и конечных объёмов (явная противоточковая схема расчёта водонасыщенности) на треугольной неструктурированной сетке. В неявной схеме расчёта давления система линейных алгебраических уравнений решается прямым методом (LDU-разложение). Предварительно применяется алгоритм минимальной степени для перенумерации узлов сетки, что обеспечивает минимум заполнения при треугольной факторизации матрицы жесткости. Для обеспечения корректности расчёта давления в окрестности точек-скважин используется мультипликативный метод выделения особенности.

В **заключении** сформулированы основные результаты работы и намечены перспективы дальнейших исследований по теме диссертации.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

1. *Гарнышев М. Ю.* К интерпретации аномальных кривых восстановления давления сложнопостроенных залежей // Труды математического центра имени Н.И.Лобачевского: Материалы VII молодежной научной школы-конференции "Лобачевские чтения – 2008 Казань, 2008. Т. 37. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 2008. С. 33–36.
2. *Гарнышев М. Ю.* Модели гидродинамического взаимодействия залежи высоковязкой нефти с замкнутыми резервуарами // Труды математическо-

го центра имени Н.И.Лобачевского: Материалы VIII молодежной научной школы-конференции "Лобачевские чтения – 2009 Казань, 2009. Т. 39. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 2009. С. 161–164.

3. *Гарнышев М. Ю., Егоров А. Г., Мазо А. Б.* Моделирование гидродинамического взаимодействия залежи высоковязкой нефти с замкнутым резервуаром // *Ученые записки КазГУ. Серия физ.-мат. науки.* 2009. Т. 151, кн. 3. С. 98–107.
4. *Гарнышев М. Ю., Егоров А. Г., Мазо А. Б.* Модель двухфазной фильтрации в пластах с проницаемой подошвой // Труды математического центра имени Н.И.Лобачевского: Лекционные материалы IX Восьмой молодежной научной школы-конференции "Лобачевские чтения – 2010 Казань, 2010. Т. 42. Казань: Каз. мат. общ-во, 2010. С. 91–99.
5. *Гарнышев М. Ю., Егоров А. Г., Мазо А. Б.* Упрощенные модели двухфазной фильтрации в пластах с проницаемой подошвой // Материалы VIII Всероссийской конференции "Сеточные методы для краевых задач и приложения Казань, 2010. Казань: Казанский университет, 2010. С. 157–164.
6. *Гарнышев М. Ю., Мазо А. Б.* Упрощенная модель фильтрации высоковязкой нефти в пласте со слабопроницаемой подошвой // Сб. тр. «XVII Международная конференция по Вычислительной механике и современным прикладным программным системам» (ВМСППС'2011). Алушта, 25–31 мая 2011 г. С. 507–510.
7. *Нефёдов Н. В., Гарнышев М. Ю., Егоров А. Г. и др.* Мониторинг турнейской залежи Мельниковского месторождения средствами пьезометрии и фильтрационного моделирования // *Георесурсы.* 2011. Т. 1. С. 23–26.